A new class of unconditionally stable numerical methods based on Adams Moulton's methods with application to radiative Darcy-Forchheimer flow

Yasir Nawaz¹ and Muhammad Arif¹

¹Air University

April 28, 2020

Abstract

Present contribution has consisted of a construction of a class of new shooting methods and application to Darcy Forchheimer fluid flow over the linearly stretching sheet under the influence of thermal radiations. Governing equations of the flow phenomena are presented in the form of partial differential equations, and these governing partial differential equations are reduced into ordinary differential equations. The final ordinary differential equations are resolved by the present given shooting method based on the class of Adam Moulton's techniques with the Gauss-Siedel iterative method. Since the system of the first-order differential is discretized by the Adam Moulton method with the Gauss-Siedel iterative method containing some unknown initial conditions, a shooting approach is employed for finding unknown initial conditions. Also, it is proved that the Adam Moulton methods using Gauss-Seidel iterative method are unconditionally stable for any system of differential equations. In additions to this, finite element simulations containing velocity profile, streamlines, temperature profile and temperature contours are deliberated with the help of graphs, and tables. Thus, the main aim of the current paper is to calculate the unique results for a coupling approach based on Adams Moulton's method for the boundary layer flow problem with the effect of heat transfer.

A new class of unconditionally stable Adams Moulton's numerical methods with application to radiative Darcy-Forchheimer flow

Yasir Nawaz, Muhammad Shoaib Arif

Stochastic Analysis & Optimization Research Group, Department of Mathematics, Air University, PAF Complex E-9, Islamabad, 44000, Pakistan.

Corresponding Email: shoaib.arif@mail.au.edu.pk

Abstract: Present contribution has consisted of a construction of a class of new shooting methods and application to Darcy Forchheimer fluid flow over the linearly stretching sheet under the influence of thermal radiations. Governing equations of the flow phenomena are presented in the form of partial differential equations, and these governing partial differential equations are reduced into ordinary differential equations. The final ordinary differential equations are resolved by the present given shooting method based on the class of Adam Moulton's techniques with the Gauss-Siedel iterative method. Since the system of the first-order differential is discretized by the Adam Moulton method with the Gauss-Siedel iterative method containing some unknown initial conditions, a shooting approach is employed for finding unknown initial conditions. Also, it is proved that the Adam Moulton methods using Gauss-Seidel iterative method are unconditionally stable for any system of differential equations. In additions to this, finite element simulations containing velocity profile, streamlines, temperature profile and temperature contours are deliberated with the help of graphs, and tables. Thus, the main aim of the current paper is to calculate the unique results for a coupling

approach based on Adams Moulton’s method for the boundary layer flow problem with the effect of heat transfer.

Keywords: Adams Moulton’s methods; Gauss-Seidel method; Darcy-Forchheimer model; Radiations; Stability

Introduction

Today, development in technology has made integrated circuits in to tiny and support the research in nano-materials. The in-depth study of stretchable flows gives a significant knowledge to the physics of boundary layer examination. These stretchable flows are systematically solved by reducing the boundary value problems into the self-comparable structure and then solved for numerical or series solution through various techniques. The trouble is that every stretching and shrinking problem consists of various governing equations, distinct transformations and a different system of solutions that are specific for each case. Scientists have formed the methods to resolve and model the flow produced by stretching and shrinking of plates [1-10]. Goldstein [11] studied various apparent structures in boundary layers which shrinking flow exhibit. Miklavcic and Wang [12] studied the flow of viscous material subjected to a shrinking sheet. The thermal manufacturing process involved heat energy conversion and its generation inside of the physical structure and are developed through heat transportation. Fourier [13] studied the utilisation of heat transportation in mechanical, biomedical and polymer industries. Wang et al. [14] have inspected the degree of thermal transportation of Nano liquids in the existence of carbon nanotubes.

Finding of fullerenes in 1985 and carbon nanotubules aroused the attention of scientific society towards their vast usage Kroto et al. [17]. Carbon has different allotropic forms and can adapt to various hybridisation states; in this term, CNTB is a single-dimensional structure that has extensive application in nanoelectronics Iijima [18]. These are made up of graphene (a two-dimensional structure that has been widely calculated by Ciraci et al. [19] and Novoselov et al. [20]) rolled into the cylinder and showed distinctive properties due to curvature Casari et al. [21]. Investigation in the field of nanotechnology is the principal aim of investigators, nowadays, which was first proposed by Choi in 1995. Nano-fluid, a crucial part of nanotechnology is capable of heat transfer and have applications in Textiles, electromagnetic, chemical, mechanical, optical and medicinal. Nadeem and Lee [24] have proposed the theory of nanofluids aver stretching sheet. Remarkable properties of nano liquids enable their frequent usage in nanotechnology. Diverse applications and vast and versatile approaches of these nanofluids can be studied in Sheikholeslami publications [25-30].

The fluid of nanomaterials is known as micropolar fluid, belong to the class of polar fluids. Eringen [30, 31] has presented the concept of micropolar fluids with their applications. Lukaszewicz [32] has shown the theory and usage of micropolar liquids. The micropolar liquid with the effects of the magnetic field was studied by Mohammeadein [33]. The inactivity (stagnation) point of flow in micropolar fluids was studied by Ishak et al. [34]. The effects of Joule heating on Magnetohydrodynamics micropolar and the effects of joule heating and thermal radiation on Magnetohydrodynamics micropolar liquid was studied by Hakaieem et al. [35] and Ramzan et al. [36] respectively; however, Yacob et al. [37] has presented the study of melting heat spread stagnation point flow over a stretching plate. Haque studied the Magnetohydrodynamics free mass movement and convection flow behaviour of micropolar liquid [38].

The system of the heat exchanger and system of geothermal energy are among those environmental and industrial systems that contain the convection flow with the existence of permeable medium. The standard law of Darcy is operative under little velocity and variable permeability. Forchheimer [42] has coincided a term square velocity to the Darcian’s velocity by using inertia and boundary features; however, Muskat [43] has introduced “Forchheimer term”, and for large Reynolds number, this term is permanently operative. The fluid movement and heat transfer study with rotating situation reveals its significant role in the petrol and chemical industries as well as in the study of earth, oceans and space technology. Greenspan and Howard [47] have found out the behaviour of rotating flow for viscous fluid which is filled in the asymmetric closed container.

The fluid movement through a porous medium has variable applications in thermal isolation, oil preparation

and chemical reactors. [48-55] indicates energy and mass movement in various fluid models. Mostly the fluid movement via porous media is more promising with respect of groundwater, water flow in a reservoir, oil resources and several others.

The Darcy model is elaborated with increased flow rate and extended to non-Darcy with integrated properties of inertia and boundary layer features; however, Forchheimer [57] proposed revised version of this model named as Darcy-Forchheimer by announcing additional terms in momentum expression. Saddeek [58] coupled Darcy-Forchheimer flow with Brownian and thermophoresis diffusion over a permeable overextended surface. Hayat et al. [60] have calculated the flow as mentioned earlier with Cattaneo Christory heat changes; however, some new insight in a too in-depth investigation about Darcy-Forchheimer and overextended flows are in [61-66].

The present contribution is dealt with the coupling of three numerical methods and applied the coupling approach for solving ordinary differential equation obtained by using similarity transformation on the governing equation of the flow problem. Adams Moulton's methods are implicit, but the present way of applying Adams Moulton's methods can be considered as explicit because the techniques are coupled with the Gauss-Seidel method. Since the initial condition for every first-order is not given, so a shooting approach is considered, which is based upon the Matlab solver 'fsolve'.

Problem Formulation

Consider the Laminar, incompressible and unsteady fluid flow over the flat extending sheet. Let the rate of the stretching plate is $V = ax$. Let x -axis is considered parallel and coincides to the plate and y -axis is perpendicular to the x -axis or stretching plate. The fluid is considered with thermal radiations. Under these conditions with the use of the characteristic of Darcy-Forchheimer model with the consideration of heat transfer. The Governing equations are expressed as

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{K} u - F u^2 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_r}{\partial y} \quad (3)$$

Where u be the horizontal and v be the vertical components of velocity. Let T be the temperature of the fluid, ν be the kinematic viscosity, $F = \frac{c_b}{x K^{1/2}}$ be the non-uniform inertia coefficient of the porous medium, c_b be the drag coefficient, K be the permeability of porous space, ρ be the density, c_p be the specified heat capacity, k be the thermal conductivity and q_r be the Roseland heat flux. The flow is considered with the following boundary conditions,

$$\begin{aligned} u = V, \quad v = 0, \quad T = T_w \quad \text{when } y = 0 \\ u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty \quad \text{when } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4)$$

Where $V = ax$ be the stretching velocity of the sheet, T_w be the constant temperature of the wall and T_∞ be a constant ambient temperature of the fluid. Using linearization of T^4 by $4TT_\infty^3 - 3T_\infty^4$, the Roseland heat flux can be reduced to

$$q_r = \frac{-16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5)$$

Where σ^* be a Stefan-Boltzman constant and k^* be the mean absorption coefficient. The following transformations are used to reduce the set of partial differential equations (1) - (3) with boundary conditions (4)

$$u = ax f'(\eta), \quad v = -(\alpha\nu)^{\frac{1}{2}} f(\eta), \quad \eta = \left(\frac{a}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} y, \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}.$$

The reduce partial differential equations are expressed by

$$f'''(\eta) = \lambda f'(\eta) + (1 + F_r) f'(\eta)^2 - f(\eta) f''(\eta) \quad (6)$$

$$\theta''(\eta) \left(1 + \frac{4}{3} R_d\right) = -Pr f(\eta) \theta'(\eta) \quad (7)$$

The reduced boundary conditions are given by

$$\begin{aligned} f &= 0, \quad f' = 1, \quad \theta = 1 \text{ when } \eta = 0 \\ f' &\rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \text{ when } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (8)$$

Where $F_r = \frac{C_b}{K^{\frac{1}{2}}}$ be an inertia coefficient, $\lambda = \frac{\nu}{aK}$ be the porosity parameter, $R_d = \frac{16\sigma T_\infty^3}{3kk^*}$ be the radiation parameter and $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$ be the Prandtl number.

Numerical Method

In order to solve the boundary value problem (6)-(7) with boundary conditions (8), a shooting method consisted of Adams-Moulton methods is implemented. It is to be noted that some shooting methods are based on the use of Runge-Kutta methods which can give the accuracy of the order of four and five. Still, the explicit Runge-Kutta methods have the deficiency to meet stability condition. But the present class of constructed shooting methods is based on implicit methods which are called Adams-Moulton. But these implicit methods are coupled with Gauss-Seidel iterative method to solve the resulting difference equation, so the implementation is still considered as in an explicit manner. But this procedure of finding the solution using Adams-Moulton method(s) and Gauss-Seidel iterative method is required to find some initial conditions because Adams-Moulton method(s) are implemented on the system of first-order differential equations, so to solve the resulting difference equation, Gauss-Seidel iterative method is employed that requires the initial conditions for each of the equation in the system of differential equations. So to find the initial condition of each of the differential equation in the system, a shooting approach is considered that finds missing initial condition for each equation of the system. Also, it should be noted that some software packages may have the facility to find the solution using the shooting method, but this or these software packages use the Runge-Kutta methods to find the solution. Since all or most of the explicit methods are conditionally stable and may take more time to converge due to stability restriction but the present contribution is based on the use of implicit methods using Gauss-Seidel iterative method which are proved are unconditionally stable in next stability section for order two and three. Similarly, the stability requirement can be checked for higher-order Adams-Moulton methods coupled with the Gauss-Seidel iterative method.

Before applying Adams-Moulton methods, the considered boundary value problems are first reduced into the systems of first-order differential equations.

Using equations (6) and (7), the system of first-order differential equations can be expressed as:

$$\text{Let } f' = f_1 \quad (9)$$

$$f'_1 = f_2 \quad (10)$$

$$f'_2 = \lambda f_1 + (1 + F_r) f_1^2 - f f_2 \quad (11)$$

$$\theta' = \theta_1 \quad (12)$$

$$\theta'_1 = -\frac{Pr}{\beta} f \theta_1 \quad (13)$$

$$\text{Where } \beta = 1 + \frac{4}{3} R_d \quad (14)$$

Since the present approach of applying numerical method is to solve discretized equations using Gauss-Seidel iterative method, the systems of equations (9)-(14) are linearized using Newton's linearization. So applying Newton's linearization on the nonlinear terms contained in equations (11) and (13)

$$f_1^2 = f_1 f_1 = f_1 f_1^{k+1} + f_1^{k+1} f_1 - f_1 f_1 = 2f_1 f_1^{k+1} - f_1^2 \quad (15)$$

$$ff_2 = ff_2^{k+1} + f^{k+1}f_2 - ff_2(16)$$

$$f\theta_1 = f\theta_1^{k+1} + f^{k+1}\theta_1 - f\theta_1(17)$$

Where the variables in bar notations in equations (15)-(17) are constants or previously computed iteration k . By using (15)-(17) into equations (11) and (14) and discretize the equations (9)-(14) using Adams-Moulton's second-order method the resulting equations are given by

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{1}{2}(f_{1,i} + f_{1,i-1})(18)$$

$$\frac{f_{1,i} - f_{1,i-1}}{h} = \frac{1}{2}(f_{2,i} + f_{2,i-1})(19)$$

$$\frac{f_{2,i} - f_{2,i-1}}{h} = \frac{1}{2}(\lambda f_{1,i} + (1 + F_r) \left(2f_{1,i}f_{1,i} - f_{1,i}^2 \right) - f_i f_{2,i} - f_i f_{2,i} + f_i f_{2,i} + \lambda f_{1,i-1} + (1 + F_r) \left(2f_{1,i-1}f_{1,i-1} - f_{1,i-1}^2 \right) - f_{i-1}f_{2,i-1} - f_{i-1}f_{2,i-1} + f_{i-1}f_{2,i-1}) (20)$$

$$\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h} = \frac{1}{2}(\theta_{1,i} + \theta_{1,i-1})(21)$$

$$\frac{\theta_{1,i} - \theta_{1,i-1}}{h} = \frac{1}{2}[-\frac{P_r}{\beta}(f_i\theta_{1,i} + f_i\theta_{1,i} - f_i\theta_{1,i} + f_{i-1}\theta_{1,i-1} + f_{i-1}\theta_{1,i-1} - f_{i-1}\theta_{1,i-1})](22)$$

By applying the Gauss-Seidel iterative method on equations (18)-(22) the resulting equations are expressed by

$$\frac{f_i^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2}(f_{1,i}^k + f_{1,i-1}^{k+1})(23)$$

$$\frac{f_{1,i}^{k+1} - f_{1,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2}(f_{2,i}^k + f_{2,i-1}^{k+1})(24)$$

$$\frac{f_{2,i}^{k+1} - f_{2,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2}(\lambda f_{1,i}^{k+1} + (1 + F_r)(2f_{1,i}^k f_{1,i}^{k+1} - (f_{1,i}^k)^2 - f_i^k f_{2,i}^k - f_i^{k+1} f_{2,i}^k + f_i^k f_{2,i}^k + (1 + F_r) \left(2f_{1,i-1}^k f_{1,i-1}^{k+1} - (f_{1,i-1}^k)^2 \right) - f_{i-1}^k f_{2,i-1}^{k+1} - f_{i-1}^{k+1} f_{2,i-1}^k + f_{i-1}^k f_{2,i-1}^k)(25)$$

$$\frac{\theta_i^{k+1} - \theta_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2}(\theta_{1,i}^k + \theta_{1,i-1}^{k+1})(26)$$

$$\frac{\theta_{1,i}^{k+1} - \theta_{1,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{P_r}{2\beta}(f_i^k \theta_{1,i}^k + f_i^{k+1} \theta_{1,i}^k - f_i^k \theta_{1,i}^k + f_{i-1}^k \theta_{1,i-1}^{k+1} + f_{i-1}^{k+1} \theta_{1,i-1}^k - f_{i-1}^k \theta_{1,i-1}^k)(27)$$

Where h be a fixed step size of the considered finite difference domain.

Stability Analysis

In order to check the stability criteria of resulting equations (23)-(27), reduce the system into the following vector-matrix form

$$X' = AX \quad (28)$$

Where $X =$

$$\begin{bmatrix} f \\ f_1 \\ f_2 \\ \theta \end{bmatrix} \text{ and } A = \begin{bmatrix} 0 & \text{amp}; 1 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 \\ 0 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 1 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 \\ -f_2 & \text{amp}; \lambda + (1 + F_r)2f_1 & \text{amp}; -f & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 \\ 0 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 1 \\ -\frac{P_r}{\beta}\theta_1 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; 0 & \text{amp}; -\frac{P_r}{\beta}f \end{bmatrix}$$

By applying the Adams-Moulton's second-order method on equation (28) yields

$$\frac{X_i - X_{i-1}}{h} = \frac{A}{2}(X_i + X_{i-1}) \quad (29)$$

By applying Gauss-Seidel iterative method on equation (29) gives the following equation

$$\frac{X_i^{k+1} - X_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{A}{2}(X_i^k + X_{i-1}^{k+1}) \quad (30)$$

In the present contribution, the Von Neuman stability criteria are employed. The criteria are usually applied to partial differential equations. Still, in this contribution, it is applied on ordinary differential equation with discretisation is given using Adams- Moulton second-order method and iterative procedure of Gauss-Seidel iterative method.

Substitution of $X_i^{k+1} = \phi^{k+1} e^{iI}$, $X_i^k = \phi^k e^{iI}$, $X_{i-1}^{k+1} = \phi^{k+1} e^{(i-1)I\phi}$ into equation (30), the resulting equation is given by

$$\frac{\phi^{k+1} e^{iI} - \phi^{k+1} e^{(i-1)I\phi}}{h}$$

$$= \frac{A}{2(\phi^k e^{iI} + \phi^{k+1} e^{(i-1)I\phi})}$$

Dividing the whole equation by e^{iI}

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^{k+1} e^{-I\phi}}{h} = \frac{A}{2}(\phi^k + \phi^{k+1} e^{-I\phi})$$

$$\left(1.D - e^{-I\phi} 1.D - \frac{h}{2} A\right) \phi^{k+1} = \frac{h}{2} A \phi^k$$

Ωηερε 1.Δ ις αν ιδεντιτψ ματριζ οφ ορδερ 5 βψ 5.

$$G = \frac{\phi^{k+1}}{\phi^k} = \left(1.D - e^{-I\phi} 1.D - \frac{h}{2} A\right)^{-1} \left(\frac{h}{2} A\right)$$

Τηεν τηε αβοε εχυατιον ζαν βε εξπρεσσεδ βψ

$$G = \left(1 - e^{-I\phi} - \frac{h}{2} \lambda_{\max}\right)^{-1} \left(\frac{h}{2} \lambda_{\max}\right)$$

Ωηερε $\lambda_{\max}$ ις τηε μαξιμουμ Ειγεναλυε οφ Α. Βψ εμπλοψινγ σταβιλιτψ ζονδιτιον $|G| \leq 1$, τηε ρεσουλτινγ ινεχυαλιτιες αρε γιεν βψ

$$\left|\frac{h}{2}(1 - e^{-I\phi} - \frac{h}{2} \lambda_{\max})^{-1} \lambda_{\max}\right| \leq 1$$

$$\frac{h}{2} |\lambda_{\max}| \leq \left|1 - e^{-I\phi} - \frac{h}{2} \lambda_{\max}\right| \leq 1 + 1 + \frac{h}{2} |\lambda_{\max}|$$

$$\frac{h}{2} |\lambda_{\max}| \leq 2 + \frac{h}{2} |\lambda_{\max}|$$

$$0 \leq 2$$

Ωηικη ις αλωαψς ριγητ. Τηικς τηε Αδαμς-Μουλτον σεζονδ-ορδερ μετηοδ υσινγ Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε μετηοδ ις υνζονδιτιοναλλψ σταβλε φορ τηε ζονσιδερεδ εχυατιονς,

Φορ τηε ζασε οφ Αδαμς-Μουλτον'ς τηιρδ-ορδερ υσινγ Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε προζεσες, αππλψινγ τηε τηιρδ-ορδερ Αδαμς-Μουλτον'ς μετηοδ ον τηε εχυατιον ις γιεν βψ

$$\frac{X_i - X_{i-1}}{h} = \frac{A}{12}(5X_i + 8X_{i-1} - X_{i-2}) \quad (31)$$

Βψ αππλψινγ τηε Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε προζεδυρε ον εχυατιον (31) τηε ρεσουλτινγ εχυατιον ις

$$\frac{X_i^{k+1} - X_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{A}{12}(5X_i^k + 8X_{i-1}^{k+1} - X_{i-2}^{k+1}) \quad (32)$$

Βψ εμπλοψινγ της ἄν-Νευμαν σταβιλιτψ ζριτερια ανδ υσινγ

$$X_i^{k+1} = \phi^{k+1} e^{iI}, \quad X_i^k = \phi^k e^{iI}, \quad X_{i-1}^{k+1} = \phi^{k+1} e^{(i-1)I\phi}, \quad X_{i-2}^{k+1} = \phi^{k+1} e^{(i-2)I\phi} \text{ιν το εχυατιον (32) ψιελδς}$$

$$\underline{\phi^{k+1} e^{iI} - \phi^{k+1} e^{(i-1)I\phi}}$$

$$\text{ενγλισηη} = A_{12(5\phi^k e^{iI} + 8\phi^{k+1} e^{(i-1)I} - \phi^{k+1} e^{(i-2)I\phi})} (33)$$

Διιδινγ της ωηολε εχυατιον βψ e^{iI} ον βοτη σιδε οφ της εχυατιον (33) ψιελδς

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^{k+1} e^{-I\phi}}{h} = \frac{A}{12} (5\phi^k + 8\phi^{k+1} e^{-I\phi} - \phi^{k+1} e^{-2I\phi})$$

$$\left(1.D - e^{-I\phi} 1.D - \frac{2h}{3} A e^{-I\phi} + \frac{h}{12} A e^{-2I\phi} \right) \phi^{k+1} = \frac{5h}{12} A \phi^k$$

Ωηερε 1.Δ ις αν ιδεντιτψ ματριζ οφ ορδερ 5 βψ 5.

$$G = \frac{\phi^{k+1}}{\phi^k} = \left(1.D - e^{-I\phi} 1.D - \frac{2h}{3} e^{-I\phi} A + \frac{h}{12} e^{-2I\phi} A \right)^{-1} \left(\frac{5h}{12} A \right)$$

Βψ απλψινγ της σταβιλιτψ ζονδιτιον, ινεχυαλιτψ ζαν βε εζπρεσσεδ ας

$$\left| \left(1 - e^{-I\phi} - \frac{2}{3} h e^{-I\phi} \lambda_{\max} + \frac{h}{12} e^{-2I\phi} \lambda_{\max} \right)^{-1} \frac{5h}{12} \lambda_{\max} \right| \leq 1$$

$$\frac{5h}{2} |\lambda_{\max}| \leq \left| 1 - e^{-I\phi} - \frac{2}{3} h e^{-I\phi} \lambda_{\max} + \frac{h}{12} e^{-2I\phi} \lambda_{\max} \right| \leq 1 + 1 + \frac{2}{3} h |\lambda_{\max}| + \frac{h}{12} |\lambda_{\max}|$$

$$\frac{h}{12} (5 - 8 - 1) |\lambda_{\max}| \leq 2$$

$$|\lambda_{\max}| \geq -\frac{6}{h}$$

Ωηιξη ις αλωαψς τρυε. Τηυς της Αδαμς-Μουλτον'ς τηρηδ-ορδερ μετηροδ ις υνςονδιτιοναλλψ σταβλε φορ της πρεσεντ ζονσιδερεδ βουνδαρψ αλυε προβλεμς, υσινγ Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε μετηροδ. Ηωεερ, ιτ ζαν βε ζονζλυδεδ τηατ της Αδαμς-Μουλτον'ς σεζονδ ανδ τηρηδ-ορδερ μετηροδς υσινγ Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε μετηροδς αρε υνςονδιτιοναλλψ σταβλε φορ ανψ βουνδαρψ αλυε προβλεμ ιωιτη της ιμπλεμεντατιον οφ ὄν-Νευμαν σταβιλιτψ ζριτερια.

Τηεορεμ:

Τηε πρεσεντ ζουπλινγ σςηεμε οφ Αδαμ'ς Μουλτον'ς μετηροδς φορ της ζονσιδερεδ ρεδυσεδ φλωα προβλεμ ηας της μαξιμουμ υπερε βουνδ.

Προοφ: Το προε της ερρορ βουνδ, λετ ζονσιδερε φηρστ τηρεε εχυατιονς ιωιτη της διςκριτιζατιον οφ της Γαυσσ-Σειδελ μετηροδ

$$\frac{f_i^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2} (f_{1,i}^k + f_{1,i-1}^{k+1}) (34)$$

$$\frac{f_{1,i}^{k+1} - f_{1,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2} (f_{2,i}^k + f_{2,i-1}^{k+1}) (35)$$

$$\frac{f_{2,i}^{k+1} - f_{2,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2} (\lambda (f_{1,i}^{k+1} + f_{1,i-1}^{k+1}) + (1 + F_r) \left(2f_{1,i}^{k+1} + 2f_{1,i-1}^{k+1} - f_1^2 \right) - f(f_{2,i}^k + f_{2,i-1}^{k+1}) - f_2(f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1}) + f f_2) (36)$$

Ανδ ζονσιδερε της φολλωινγ εζαστ σςηεμες

$$\frac{f_i^E - f_{i-1}^E}{h} = \frac{1}{2} (f_{1,i}^E + f_{1,i-1}^E) (37)$$

$$\frac{f_{1,i}^E - f_{1,i-1}^E}{h} = \frac{1}{2}(f_{2,i}^E + f_{2,i-1}^E)(38)$$

$$\frac{f_{2,i}^E - f_{2,i-1}^E}{h} = \frac{1}{2}(\lambda(f_{1,i}^E + f_{1,i-1}^E) + (1 + F_r) \left(2f_1 f_{1,i}^E + 2f_1 f_{1,i-1}^E - f_1^2 \right) - f(f_{2,i}^E + f_{2,i-1}^E) - f_1(f_i^E + f_{i-1}^E) + f f_2)(39)$$

Λετ της ερρορ αρε γιεν βψ

$$e_{1,i}^k = f_i^k - f_i^E, \quad e_{2,i}^k = f_{1,i}^k - f_{1,i}^E, \quad e_{3,i}^k = f_{2,i}^k - f_{2,i}^E$$

Γιεν της ερρορς ας μεντιονεδ αβοε, ζονεργενσε ερρορ εχυατιονς αρε γιεν βψ

$$\frac{e_{1,i}^{k+1} - e_{1,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2}(e_{2,i}^{k+1} + e_{2,i-1}^{k+1})(40)$$

$$\frac{e_{2,i}^{k+1} - e_{2,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2}(e_{3,i}^{k+1} + e_{3,i-1}^{k+1})(41)$$

$$\frac{e_{3,i}^{k+1} - e_{3,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2}(\lambda(e_{2,i}^{k+1} + e_{2,i-1}^{k+1}) + (1 + F_r) \left(2f_1 e_{2,i}^{k+1} + 2f_1 e_{2,i-1}^{k+1} \right) - f(e_{3,i}^k + e_{3,i-1}^{k+1}) - f_2(e_{1,i}^{k+1} + e_{1,i-1}^{k+1}))(42)$$

Υσινγ αβσολυτε αλυες ανδ ινεχυαλιτιες της εχυατιονς (40)- (42) ζαν βε εζπρεσσεδ βψ

$$|e_{2,i-1}^{k+1}| \leq |e_{2,1}^k| + \frac{2}{h}(|e_{1,i-1}^{k+1}|) + |e_{1,i}^{k+1}| + M_1\theta(h^2)(43)$$

$$|e_{3,i-1}^{k+1}| \leq |e_{3,1}^k| + \frac{2}{h}(|e_{2,i-1}^{k+1}|) + |e_{2,i}^{k+1}| + M_2\theta(h^2)(44)$$

$$|e_{3,i}^{k+1}| + |e_{3,i-1}^{k+1}| \geq \frac{h}{2}[-|\lambda|(|e_{2,i}^{k+1}| + |e_{2,i-1}^{k+1}|) - (1 + F_r)2f_1(|e_{2,i}^{k+1}| + |e_{2,i-1}^{k+1}|) - |f|(|e_{3,i}^k| + |e_{3,i-1}^{k+1}|) + |f_2|(|e_{1,i}^{k+1}| + |e_{1,i-1}^{k+1}|)] + M_3\theta(h^2)(45)$$

$$\Lambda\epsilon\tau e_1^k = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{1,i}^k|, \quad e_2^k = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{2,i}^k|, \quad e_3^k = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{3,i}^k|$$

Βεζανσε οφ της εχυατιονς μεντιονεδ αβοε, ινεχυαλιτιες (43)-(45) αρε εζπρεσσεδ βψ

$$e_2^{k+1} \leq e_2^k + \frac{2}{h}(2e_1^{k+1}) + M_1\theta(h^2)(46)$$

$$e_3^{k+1} \leq e_3^k + \frac{2}{h}(2e_2^{k+1}) + M_2\theta(h^2)(47)$$

$$\frac{h}{2} \left| f_2 \right| 2e_1^{k+1} \leq \frac{2}{h} \left(2e_3^{k+1} + |\lambda| 2e_2^{k+1} + |1 + F_r| 2f_1 2e_2^{k+1} + \left| f \right| (e_3^k + e_3^{k+1}) \right)(48)$$

Αδδινγ ινεχυαλιτιες (46)-(48), της φολλοωινγ ινεχυαλιτψ ις οβταινεδ

$$\frac{h}{2} \left| f_2 \right| 2e_1^{k+1} + e_2^{k+1} + e_3^{k+1} \leq e_2^k + \frac{4}{h}e_1^{k+1} + e_3^k + \frac{4}{h}e_2^{k+1} + \frac{4}{h}e_3^{k+1} + \frac{h}{2}[|\lambda| 2e_2^{k+1} + |1 + F_r| 4f_1 e_2^{k+1} + \left| f \right| (e_3^k + e_3^{k+1})] + M \theta(h^2)(49)$$

Λετ $e^k = \max\{e_1^k, e_2^k, e_3^k\}$. Της λαστ ινεχυαλιτψ (49) ζαν βε εζπρεσσεδ βψ

$$\frac{h}{2} \left| f_2 \right| 2e^{k+1} + e^{k+1} + e^{k+1} \leq e^k + \frac{4}{h}e^{k+1} + e^k + \frac{4}{h}e^{k+1} + \frac{4}{h}e^{k+1} + \frac{h}{2}[|\lambda| 2e^{k+1} + |1 + F_r| 4 \left| f_1 \right| e^{k+1} + \left| f \right| (e^k + e^{k+1})] + M \theta(h^2)$$

Φρομ της λαστ ινεχυαλιτψ, της φολλοωινγ ινεχυαλιτψ ις οβταινεδ

$$h \left| f_2 \right| + 2 - \frac{4}{h} - \frac{4}{h} - \frac{4}{h} - h|\lambda| - h|1 + F_r| 2 \left(\left| f_1 \right| - \frac{h}{2} \left| f \right| \right) e^{k+1} \leq 2e^k + \frac{h}{2} \left| f \right| e^k + M\theta(h^2)(50)$$

$$\Lambda\epsilon\tau\beta = h \left| f_2 \right| + 2 - \frac{12}{h} - h|\lambda| - h|1 + F_r| 2 \left| f_1 \right| - \frac{h}{2} \left| f \right|$$

$$\text{Τηεν λαστ ινεχυαλιτψ ζαν βε εζπρεσσεδ βψ} \beta e^{k+1} \leq (2 + \frac{h}{2} \left| f \right| e^k + M\theta(h^2))$$

$$\text{Λετ } \alpha = 2 + \frac{h}{2} |f|$$

$$\text{Τηεν } \beta e^{k+1} \leq \alpha e^k + M\theta(h^2) \quad (51)$$

$$\text{Λετ } k = 0$$

$$\text{Τηεν } \beta e^1 \leq \alpha e^0 + M\theta(h^2)$$

$$\text{Σινξε τηε φιξεδ βουνδαρψ ζονδιτιονς αρε γιεν σο } e^0 = 0.$$

$$\text{Τηε λαστ ινεχυαλιτψ βεζομες}$$

$$\beta e^1 \leq +M\theta(h^2)$$

$$\text{Λετ } k = 1 \text{ ιν } (51)$$

$$\beta e^2 \leq \alpha e^1 + M\theta(h^2)$$

$$e^2 \leq \frac{\alpha}{\beta} e^1 + \frac{M}{\beta} \theta(h^2)$$

$$\text{Λετ } \frac{M}{\beta} = M_\beta, \text{ ανδ } \frac{\alpha}{\beta} = \gamma$$

$$\text{Τηεν}$$

$$e^2 \leq \gamma e^1 + M_\beta \theta(h^2) \leq \gamma (M_\beta \theta(h^2)) + M_\beta \theta(h^2) = (\gamma + 1) M_\beta \theta(h^2)$$

$$\Phi\text{ορ } k = 2 \text{ ιν } (51), \text{ ιτ ις οβταινεδ}$$

$$e^3 \leq \gamma e^2 + M_\beta \theta(h^2) \leq \gamma(\gamma + 1) (M_\beta \theta(h^2)) + M_\beta \theta(h^2) = (\gamma^2 + \gamma + 1) M_\beta \theta(h^2)$$

$$\text{Ανδ σιμιλαρλψ, ιτ γοες ον}$$

$$e^k \leq (1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1}) M_\beta \theta(h^2) = \frac{1-r^k}{1-r} M_\beta \theta(h^2)$$

Φορ φινδινγ τηε ερρορ βουνδ φορ τηε λαστ ζονσιδερεδ εχυατιον, διςκρετισε υσινγ Αδαμ'ς Μουλτον σεζονδ-ορδερ μετηοδ ανδ πυτ ον τηε Γαυσς-Σειδελ ιτερατιε μετηοδ, της συβσεχυεντ ζονεργενες ερρορ εχυατιονς αρε οβταινεδ

$$\frac{e_{4,i}^{k+1} - e_{4,i-1}^{k+1}}{h} = \frac{1}{2} (e_{5,i}^{k+1} + e_{4,i-1}^{k+1}) \quad (52)$$

$$\frac{e_{5,i}^{k+1} - e_{5,i-1}^{k+1}}{h} = -\frac{P_r}{2(1+\frac{4}{3}R_d)} [f(e_{5,i}^{k+1} - e_{5,i-1}^{k+1}) + \theta_1(e_{1,i}^{k+1} - e_{1,i-1}^{k+1})] \quad (53)$$

$$\Upsilon\text{σινγ αβσολυτε αλυε, ανδ ινεχυαλιτιες, εχυατιον } (52)$$

$$|e_{5,i-1}^{k+1}| \leq |e_{5,i}^{k+1}| + \frac{2}{h} (|e_{4,i}^{k+1}| - |e_{4,i-1}^{k+1}|) + M_4 \theta(h^2) \quad (54)$$

$$\frac{2}{h} e_5^{k+1} \geq \frac{\delta}{2} \left[|f| e_5^{k+1} - |f| e_5^k - |\theta_1| 2e_1^{k+1} \right]$$

$$\Omega\eta\epsilon\rho\epsilon \ e_5^k = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{5,i}^k| \text{ ανδ } \delta = \frac{P_r}{1+\frac{4}{3}R_d}$$

$$|f| e_5^{k+1} \leq \frac{4}{\eta\delta} e_5^{k+1} + |f| e_5^k + 2|\theta_1| e_1^{k+1} + M_5 \theta(h^2) \quad (55)$$

$$\text{Αδδινγ } (51), (54) \text{ ανδ } (55), \text{ ιτ ις οβταινεδ}$$

$$|f| e_5^{k+1} + e_5^{k+1} + e_5^{k+1} \leq \frac{4}{\eta\delta} e_5^{k+1} + |f| e_5^k + 2|\theta_1| e_1^{k+1} + \gamma e^k + M\theta(h^2) + e_5^k + \frac{4}{h} e_4^{k+1} M_5 \theta(h^2)$$

$$\text{Λετ } e^{-k} = \max\{e_5^k, e^k, e_4^k\}$$

Την τη λαστ νεχυαλιτψ ιμπλιες

$$\left(|f| + 2 - \frac{4}{\eta\delta} - 2|\theta_1| - \frac{4}{h} \right) e^{-k+1} \leq |f| e^{-k} + \gamma e^{-k} + e^{-k} + M_5 \theta (h^2)$$

$$\Lambda \epsilon \tau \delta_1 = \left| f \right| + 2 - \frac{4}{\eta\delta} - 2|\theta_1| - \frac{4}{h} \alpha \nu \delta \delta_2 = \left| f \right| + \gamma + 1$$

Τηε λαστ νεχυαλιτψ ζαν βε εξπρεσσεδ ας

$$\delta_1 e^{-k+1} \leq \delta_2 e^{-k} + M_5 \theta (h^2)$$

$$\Lambda \epsilon \tau \frac{\delta_2}{\delta_1} = \delta_3 \alpha \nu \delta \frac{M_5}{\delta_1} = M_\delta$$

Την τη λαστ νεχυαλιτψ ζαν βε εξπρεσσεδ βψ

$$e^{-k+1} \leq \delta_3 e^{-k} + M_\delta \theta (h^2) \quad (56)$$

Φορ $k = 0$ ιν (56)

$$e^{-1} \leq \delta_3 e^{-0} + M_\delta \theta (h^2) \text{ της ιμπλιες } e^{-1} \leq M_\delta \theta (h^2)$$

Φορ $k = 1$ ιν (56)

$$e^{-2} \leq \delta_3 e^{-1} + M_\delta \theta (h^2) \leq \delta_3 M_\delta \theta (h^2) + M_\delta \theta (h^2) = (\delta_3 + 1) M_\delta \theta (h^2)$$

Φορ $k = 2$ ιν (56)

$$e^{-3} \leq \delta_3 e^{-2} + M_\delta \theta (h^2) \leq \delta_3 (\delta_3 + 1) M_\delta \theta (h^2) + M_\delta \theta (h^2) = (\delta_3^2 + \delta_3 + 1) M_\delta \theta (h^2)$$

ανδ σιμιλαρλψ, ιψ ιτ γοες ον, ωε γετ

$$e^{-k} \leq \left(1 + \delta_3 + \delta_3^2 + \dots + \delta_3^{k-1} \right) M_\delta \theta (h^2) = \frac{1 - \delta_3^k}{1 - \delta_3} M_\delta \theta (h^2)$$

Ρεσυλτς ανδ διςυσσιονς

Απλκιατιον οφ της νυμερικαλ μετηοδ ις γιεν φορ σολινγ βουνδαρψ λαψερ φλωω προβλεμ. Σεσονδ ανδ τηιρδ-ορδερ Αδαμς Μουλτον μετηοδ ις υτιλιζεδ το σολε ορδιναρψ διφφερεντιαλ εχυατιονς. Σινσε της δομαιν οφ της πρεσεντ προβλεμ ις σεμι-ινφινιτε βυτ ιτ ις ζονσιδερεδ ας α φινιτε φορ απλψινγ της νυμερικαλ μετηοδ. Τηε λενγτη οφ της δομαιν μαψ αρψ ιν εαση σιμυλατιον. Τηε σταβιλιτψ οφ σεσονδ ανδ τηιρδ-ορδερ Αδαμς Μουλτον μετηοδς ηας βεεν γιεν. Τηε σεσονδ ανδ τηιρδ-ορδερ Αδαμς Μουλτον προσεδυρες ηαε προεν το βε υνζονδιτιοναλλψ εεν φορ ανψ σψστεμ οφ ορδιναρψ διφφερεντιαλ εχυατιονς υσινγ της Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε σζημε. Τηε πρεσεντ ζουπλινγ αππροαξη οφ Αδαμς Μουλτον μετηοδ ωιτη Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε μετηοδ ζαν βε ζονσιδερεδ εξπλιςιτ, ανδ ιτ σηουλδ βε νοτεδ τηατ της Αδαμς Μουλτον μετηοδς αρε ιμπλιςιτ. Σινσε της προσεδυρε οφ σολινγ διφφερεντιαλ εχυατιονς ζαν βε ζονσιδερεδ εξπλιςιτ ανδ της Αδαμς Μουλτον μετηοδς αρε υσεδ ον φιρστ-ορδερ διφφερεντιαλ εχυατιονς, σο ιτ ρεχυιρες αν ινιτιαλ ζονδιτιον φορ εερψ φιρστ-ορδερ διφφερεντιαλ εχυατιον. Σινσε της ζονσιδερεδ σετ οφ ορδιναρψ διφφερεντιαλ εχυατιονς ις της βουνδαρψ αλυε προβλεμ, σο σομε ινιτιαλ ζονδιτιονς αρε μισσινγ. Τηερεφορε ιν ορδερ το φινδ της μισσινγ ινιτιαλ ζονδιτιονς, α σηροστινγ μετηοδ ηας βεεν υτιλιζεδ. Τηε σηροστινγ μετηοδ ηας ζονσιστεδ οφ της Ματλαβ σολερ 'φσολε' τηατ ζαν σολε της εχυατιονς. Σο, τηερε αρε τηρεε μετηοδς ζουπλεδ τογετηερ ανδ ηαε βεεν απλκιεδ το σολε της ζονσιδερεδ σετ οφ ορδιναρψ διφφερεντιαλ εχυατιονς. Ηοωεερ, της ρεχυιρεμεντς οφ τηεσε μετηοδς αρε τωο ινιτιαλ γυεσσες τηατ ηαε βεεν υσεδ φορ Ματλαβ σολερ 'φσολε' ανδ Γαυσσ-Σειδελ ιτερατιε μετηοδ. Αλσο, ιτ σηουλδ βε νοτεδ τηατ της υπδατεδ ινιτιαλ γυεσσες φορ 'φσολε' ηαε βεεν υσεδ φορ σολινγ της διφφερεντιαλ εχυατιονς. Ιφ της προβλεμ δοες νοτ προιδε αν αςζυρατε σολυτιον φορ σομε γιεν ινιτιαλ γυεσσς φορ 'φσολε', την τη λενγτη οφ της δομαιν δεςρεασεδ, ανδ της μισσινγ ινιτιαλ ζονδιτιονς αρε φουνδ ον της σμαλλ δομαιν. Τηε φουνδ ινιτιαλ ζονδιτιονς ηαε βεεν υσεδ φυρτηερ ας ινιτιαλ γυεσσες φορ 'φσολε' ανδ την τη σολυτιον ωας φουνδ ον λιττλε λαρχερ δομαιν. Σο, της

υπόδατο ενιαία γυαλά φορ 'ψοφολέ' ζαν βε υσεφύλ φορ σολινγ διφφερεντιάλ εχυατιον υσινγ σηοοτινγ αππροαση. Τηε Θαζοβι ιτερατιε μετθοδ ζαν αλσο βε υσεδ φορ σολινγ διφφερεντε εχυατιονς, βυτ τηε πρεσεντ ζοντριβυτιον ις δεαλτ ωιτη τηε Γαυσσ-Σειδελ μετθοδ.

Φιγ. 1 σηοως τηε ελοσιτψ προφιλε ωιτη τηε ρισε οφ ποροσιτψ παραμετερλ. Ιτ ζαν βε ζονζλυδεδ τηατ τηε ελοσιτψ δεζλινεζ ωιτη τηε υψυργε οφ τηε ποροσιτψ παραμετερ, ανδ τηις ηαππενς δυε το μορε ρεσιςτανζε οφ φλυιδ ελοσιτψ ωην τηε ποροσιτψ παραμετερ ινζρεασεζ. Φιγ. 2 σηοως τηε ελοσιτψ προφιλε ωιτη τηε ινζρεασε ιν ινερτια ζοεφφισιεντΦρ. Τηις φιγυρε δεμονστρατεζ τηατ τηε ελοσιτψ δεζλινεζ ωιτη τηε ενηανζεμεντ οφ τηε ινερτια ζοεφφισιεντ ανδ τηε τηιςκνεζ οφ τηε βουνδαρψ λαψερ δεζλινεζ. Φιγ. 3 σηοως τηε τεμπερατυρε προφιλε ωην τηε ραδιατιον παραμετερ αριεζ σινζε τηε τεμπερατυρε ινζρεασεζ δυε το τηε ινζρεμεντ ιν τηε ραδιατιον παραμετερ ανδ τηερεφορε, τηε τεμπερατυρε προφιλε ινζρεασεζ. Φιγ. 4 σηοως τηε τεμπερατυρε προφιλε ωην τηε ποροσιτψ παραμετερ αριεζ. Βψ λοοκινγ ατ τηις φιγυρε, ιτ ζαν βε ζονζλυδεδ τηατ τηε τεμπερατυρε προφιλε ρισεζ ωιτη τηε γρωωτη ιν ποροσιτψ παραμετερ. Φιγ. 5 σηοως τηε τεμπερατυρε προφιλε ωην τηε Πρανδτλ νυμβερ αριεζ. Σινζε τηε ινζρεασε ιν Πρανδτλ νυμβερ γιεζ α δεζρεασε ιν τηερμαλ διφφυσιτυ ανδ α δεζρεασε ιν τηερμαλ διφφυσιτυ γιεζ α σηαρπ φαλλ ιν τηερμαλ ζονδυζτυτυ τηατ γιεζ σλωועρ ηεατ τρανσφερ ανδ τηις μακεζ α φαλλ ιν τηε τεμπερατυρε προφιλε.

Φιγ. 6 σηοως τηε μαξιμου αβςολυτε ρεσιδυαλ. Τηε ρεσιδυαλ ις φουνδ βψ φινδινγ ονε εξτρα δεριατιε φορ βοτη τηε ζονσιδερεδ διφφερεντιάλ εχυατιονς ωηιζη ωερε οβταινεδ βψ αππλψινγ σιμιλαριτψ τρανσφορματιονς ον γοερνινγ εχυατιονς. Σινζε τηε σολυτιον οφ εαζη φιρστ-ορδερ εχυατιον ζαν γιε τηε μαξιμου σεζονδ ανδ τηε φιρστ δεριατιε οφ βοτη τηε εχυατιονς, βυτ τηε εχυατιονς ζονταιν τηιρδ ανδ σεζονδ-ορδερ δεριατιεζ, σο ονε τηιρδ ανδ σεζονδ νυμεριζαλ δεριατιεζ αρε φουνδ φιρστ. Ονε εξτρα δεριατιε ζαν βε φουνδ βψ αππλψινγ φορ τηε σεζονδ-ορδερ φορωαρδ, βαζκωαρδ ανδ ζεντραλ διφφερενζε φορμουλαζ ον τηε φουνδ σεζονδ ανδ φιρστ δεριατιεζ οφ βοτη εχυατιονς. Ονε τηε τηιρδ ανδ σεζονδ-ορδερ δεριατιεζ αρε φουνδ τηεν τηε ρεσιδυαλ ις φουνδ, ανδ τηε μαξιμου αβςολυτε οφ εαζη ρεσιδυαλ γιεζ τηε ρεσιδυαλ ωηιζη ις γιεν ιν Φιγ. 6. Τηις ρεσιδυαλ ις γιεν ιν [67]. Φιγ. 7 σηοως τηε μαξιμου οφ νορμζ φορ τηε ερρορς. Τηε ερρορ ις φουνδ βψ φινδινγ τηε διφφερενζε βετωεεν τηε σολυτιον οφ εαζη εχυατιον ανδ σολυτιονς οβταινεδ βψ Ματλαβ σολερ 'βπ4ς', ανδ τηε μαξιμου νορμ ις φουνδ βψ τακινγ τηε μαξιμου οφ τηε νορμζ οφ εαζη διφφερενζε. Φιγ.8 σηοως τηε μαξιμου οφ αλλ τηε νορμζ οφ ερρορ οερ τηε νυμβερ οφ γριδ ποιντς. Φιγς. 9-12 αρε ζονστρυζεδ φρομ τηε σοφτωαρε, ωηιζη ις βασειδ ον τηε φινιτε ελεμεντ μετθοδ. Α ρεζτανγυλαρ αρεα ις ζονστρυζεδ ωιτη ζερο ινφλω, ανδ τηε φλω ις γενερατεδ δυε το τηε ελοσιτψ οφ τηε βοττομ ωαλλ. Τηε φλω ηαζ ιτς μαξιμου ελοσιτψ νεαρ το τηε βοττομ ωαλλ, ωηιζη ζαν βε σεεν βψ λοοκινγ ατ τηε φιγ. 9. Τηε μαξιμου το μινιμου ζολουρς ζαν βε σεεν βψ λοοκινγ ατ τηε ζολουρ βαρς γιεν ιν φιγ.9. Ας τηε ελοσιτψ οφ τηε βοττομ ωαλλ ινζρεασεζ τηε ρισε ιν τηε βουνδαρψ λαψερ ζαν βε σεεν ον τηε λεφτ σιδε. Τηε ρισε ιν ινζρεασινγ ωην μοεζ φρομ σμαλλ το ηιγηερ ελοσιτψ οφ τηε βοττομ ωαλλ. Σινζε τηε στρεαμλινεζ αρε ταγγεντ το τηε ελοσιτψ φιελδ, σο τηε ζλεαρ παττερν οφ στρεαμλινεζ ζαν βε σεεν βψ λοοκινγ ατ φιγ. 10 (α). Σινζε τηε ελοσιτψ ις αππροξιματελψ ηοριζονταλ ανδ σομε βεηαιουρ νεαρ το τηε λεφτ ωαλλ, σο τηε στρεαμλινεζ αλσο αρε ηοριζονταλ νεαρ το τηε βοττομ ανδ υπερ ωαλλς ανδ ηαζ σομε κινδ οφ βεηαιουρ νεατ το τηε λεφτ ωαλλ. Τηε παττερν οφ στρεαμλινεζ ις διςτυρβεδ βψ ινζρεασινγ τηε ελοσιτψ οφ τηε βοττομ ωαλλ. Τηε αππροξιματελψ νεαρ ρισε ζαν βε σεεν ιν φιγ.9 ανδ αλσο ζαν βε οβσερεδ ιν φιγ. 10 ανδ τηε ωηολε παττερν οφ στρεαμλινεζ ιν φιγ. 10 (β-δ) αρε διςτυρβεδ δυε το τηε ρισε νεαρ το τηε λεφτ ωαλλ. Φιγ. 11 σηοως τηε τηερμαλ βουνδαρψ λαψερ δυε το τηε ηοττερ βοττομ ωαλλ. Τηε ρισε οφ τηε τεμπερατυρε νεαρ το λεφτ ωαλλ ζαν βε σεεν ζλεαρλψ ιν φιγ. 11 (α) δυε το τηε φαζτ τηατ μορε φλυιδ σταψς νεαρ το λεφτ ωαλλ ωην τηε βοττομ ωαλλ μοεζ ωιτη τηε γιεν ελοσιτψ. Σο τηις φλυιδ βεζομεζ ηοττερ τηαν τηε φλυιδ, ωηιζη ις φαρ αωαψ φρομ τηε λεφτ ωαλλ ανδ τηε δωωνφαλλ οφ τηε τεμπερατυρε ζαν βε σεεν ωην ονε μοεζ φρομ λεφτ το ριγητ. Σιμιλαρλψ, τηε τεμπερατυρε ζοντουρ ιν φιγ. 12 (α) φορ τηε τεμπερατυρε προφιλε γιεν ιν φιγ. 11 (α). Τηις ζοντουρ οφ τηε τεμπερατυρε σηοως τηε διςτριβυτιον οφ τηε τεμπερατυρε αππροξιματελψ ιν τηε ωηολε ρεζτανγυλαρ ρεγιον. Ωην τηε ελοσιτψ οφ τηε βοττομ ωαλλ ινζρεασεζ, τηε σπεεδ οφ τρανσφερρινγ τηε φλυιδ παρτιζλεζ φρομ λεφτ πλαζε το ριγητ πλαζε ινζρεασεζ ανδ τηις ινζρεασε οφ φλυιδ παρτιζλεζ, ις ρεσπονσιβλε φορ ρεδυζινγ τηε τεμπερατυρε οφ τηε φλυιδ αππροξιματελψ βετωεεν τηε τοπ ανδ βοττομ ωαλλς. Αλσο, τηις κινδ οφ βεηαιουρ ζαν βε σεεν βψ λοοκινγ ατ τηε φιγ. 12 (β-δ) τηατ ζοντουρ αρε αππροξιματελψ ηοριζονταλ νεαρ το τηε βοττομ ανδ τοπ ωαλλς δυε το τηε υνιφορμ τεμπερατυρε νεαρ το τηεσε ωαλλς. Σο ιφ τηε ελοσιτψ ινζρεασεζ, τηε τρανσφερρινγ οφ τηε τεμπερατυρε φρομ τηε βοττομ ωαλλ το τηε ινσιδε φλυιδ βεζομεζ σλωועρ. Τηεσε φιγς. 9-12 αρε δραιν υσινγ

της ροεφφισιεντ οφ u^2 ις υσεδ το βε 0.1, ανδ της ροεφφισιεντ οφ u ις σελεστεδ το βε 0.7 φορ Δαρςψ-Φορσηειμερ φλυιδ ωιτηουτ ρονσιδερινγ τηερμαλ ραδιατιονς.

δνςλυσιονς

Α ρουπλινγ αππροαξη βασεδ υπον Αδαμς Μουλτον'ς μετηοδ ηας βεεν συςσεσφυλλψ αππλιεδ φορ της βουνδαρψ λαψερ φλωω προβλεμ ωιτη της εφφεστ οφ ηεατ τρανσφερ. Τηε πρεσεντ στρατεγψ οφ υσινγ Αδαμς Μουλτον'ς μετηοδ ραν βε ρονσιδερεδ ας εξπλιςιτ δυε το της ρουπλινγ οφ της μετηοδ(ς) ωιτη της Γαυσσ-Σειδελ μετηοδ. Σινσε της Αδαμς Μουλτον'ς μετηοδς αρε εμπλοφεδ ον της φιρστ-ορδερ διφφερεντιαλ εχυατιονς, σο α σηοοτινγ αππροαξη ηας βεεν ρονσιδερεδ φορ φινδινγ της μισσινγ ινιτιαλ ρονδιτιονς. Τηε σταβιλιτψ φορ της ρονσιδερεδ μετηοδς ηας βεεν φουνδ, ανδ ιτ ηας βεεν προεδ τηατ της μετηοδς αρε υνςονδιτιοναλλψ σταβλε φορ εαση ψψστεμ οφ διφφερεντιαλ εχυατιονς. Τηε πρεσεντ αππροαξη οφ ρουπλεδ μετηοδς ραν βε αππλιεδ φυρτηερ το σολε διφφερεντιαλ εχυατιονς.

Αςκνωλεδγεμεντς

Τηε αυτηορς αρε γρατεφυλ το ιζε-ηανςελλορ, Αιρ Υνιερσιτυ, Ισλαμαβαδ φορ προιδινγ αν εξεελλεντ ρεσεαρχη ενιρονμεντ ανδ φασιλιτιες.

Δεσλαρατιον οφ ρονφλιςτινγ ιντερεστς

Τηε αυτηορ(ς) δεσλαρεδ νο ποτεντιαλ ρονφλιςτς οφ ιντερεστ ρονςερνινγ της ρεσεαρχη, αυτηορσηιπ, ανδ/ορ πυβλιςατιον οφ της αρτιςλε.

Φυνδινγ

Τηε αυτηορ(ς) ρεσειεδ νο φινανςιαλ συππορτ φορ της ρεσεαρχη, αυτηορσηιπ, ανδ/ορ πυβλιςατιον οφ της αρτιςλε.

Ρεφερενςες

- [1] Β.ΐ. Σακιαδισ , Βουνδαρψ-λαψερ βεηαιορ ον ροντινυοϋς σολιδ συρφαε: Ι. Βουνδ- αρψ-λαψερ εχυατιονς φορ τωο-διμενσιοναλ ανδ αξισψμμετρις φλωω, Θ. ΑΙηε. 3 (1961) 26–28 .
- [2] Α.Θ. ΐρανε , Φλωω παστ α στρετςηινγ πλατε, Ανγεω Ματη. Πηψς. 2 (1970) 645–647 .
- [3] ΐ.Ψ. Ωανγ , Εξαστ σολυτιονς οφ της στεαδψ στατε Ναιερ-Στοκες εχυατιονς, Ανν. Ρειω. Φλυιδ Μεση. 23 (1991) 159–177 .
- [4] Π Γυπταανδ , Α.Σ. Γυπτα , Ηεατ ανδ μαας τρανσφερ ον α στρετςηινγ σηεετ ωιτη συςτιον ορ βλωωινγ, αν. Θ. ηεμ. Ενγ. 55 (1977) 744–746 .
- [5] Ε. Μαχψαρι , Β. Κελλερ , Εξαστ σολυτιονς φορ σελφ-σιμιλαρ βουνδαρψ-λαψερ φλωως ιν- δυσεδ βψ περμεαβλε στρετςηινγ ωαλλς, Ευρ. Θ. Μεση. Β. 19 (20 0 0) 109–122 .
- [6] Τ. Ηαψατ , Μ.Ι. Κηαν , Μ. Φαροοχ , Α. Αλσαεδι , Μ. Ωαχας , Τ. Ψασμεεν , Ιμπαστ οφ ατ- τανεο-ηριστο ηεατ φλυξ μονδελ ιν φλωω οφ αριαβλε τηερμαλ ρονδυςτιψ φλυιδ οερ α αριαβλε τηικεδ συρφαε, Ιντ. Θ. Ηεατ Μαας Τρανσφ. 99 (2016) 702–710 .
- [7] Μ.Ι. Κηαν , Μ. Ωαχας , Τ. Ηαψατ , Α. Αλσαεδι , Α ρομπαρατιε στυδψ οφ αςσον φλυιδ ωιτη ηομογενεοϋς- ηετερογενεοϋς ρεαςτιονς, Θ. δλλοιδ Ιντερφαε Σςι. 498 (2017) 85–90 .
- [8] Τ. Φανγ , Θ. Ζηανγ , ΐλοσεδ-φορμ εξαστ σολυτιονς οφ ΜΗΔ ιςοϋς φλωω οερ α σηρινκινγ σηεετ, δμμυ. Νονλινεαρ Σςι. Νυμερ. Σιμυλ. 14 (2009) 2853–2857 .
- [9] Τ. Ηαψατ , Σ. Χαψψμ , Μ.Ι. Κηαν , Α. Αλσαεδι , ΐρρεντ προγρεσσες αβουτ προβαβλε ερρορ ανδ στατιστιςαλ δεσλαρατιον φορ ραδιατιε τωο πηασε φλωω υσινγ Αγ-Η 2 Ο ανδ ΐ-Η 2 Ο νανοματεριαλς, Ιντ. Θ. Ηψδρογεν Ενεργψ 42 (2017) 29107–29120 .
- [10] Μ.Ι. Κηαν , Τ. Ηαψατ , Α. Αλσαεδι , Σ. Χαψψμ , Μ. Ταμοορ , Εντροψ οπτιμιζατιον ανδ χυαρτις αυτοςαταλψς ιν ΜΗΔ ρηεμιςαλλψ ρεαςτιε σταγνατιον ποιντ φλωω οφ Σισκο νανοματεριαλ, Ιντ. Θ. Ηεατ Μαας Τρανσφ. 127 (2018) 829–837 .

[11] Θ. Γολδστεϊν , Ον βασικωαρθ βουνδαρψ λαψερ ανδ φλω ιν ζονεργινγ πασσαγεσ, Θ. Φλυιδ Μεσση. 21 (1965) 33–45 .

[12] Μ. Μικλασικ , Ξ.Ψ. Ωανγ , ΐσζουσ φλω δυε το α σπρινκινγ σπρετ, Χυαρτ. Αππλ. Ματη. 64 (2006) 283–290 .

[13] Φουριερ Θ.Β.Θ 1822, Τηεοριε αναλψτιχυε. Δε Λα ζηαλευρ Παρις.

[14] Θ. Ωανγ , Θ. Ζηυ , Ξ. Ζηανγ , Ψ. Ήεν , Ηεατ τρανσφερ ανδ πρεσσυρε δροπ οφ νανοφλυ- ιδς ζονταινινγ ζαρβον νανοτυβεσ ιν λαμιναρ φλωσ, Εξπερ. Τηερμαλ Φλυιδ Σζι. 44 (2013) 716–721 . [15] Τ. Ηαψατ , Μ.Ι. Κηαν , Μ. Ωαχασ , Α. Αλσαεδι , Μ. Φαρροχ , Νυμερικαλ σιμυλατιον φορ μελτινγ ηεατ τρανσφερ ανδ ραδιατιον εφφερετς ιν σταγνατιον ποινη φλω οφ ζαρ- βον-ωατερ νανοφλυιδ, δμπτ. Μετηοδ. Αππλ. Μεσση. Ενγ. 315 (2017) 1011–1024 .

[16] Τ. Ηαψατ , Κ. Μυηαμμαδ , Μ. Φαρροχ , Α. Αλσαεδι , Υνστεαδψ σχυεεζινγ φλω οφ ζαρβον νανοτυβεσ ωιτη ζονεστιε βουνδαρψ ζονδιτιονς, ΠΛοΣ ΟΝΕ 11 (2016) 0152923 .

[17] Η.Ω. Κροτο, Θ.Ρ. Ηεατη, Σ.Ξ. Ο΢ριεν, Ρ.Φ. Ύρλ, Ρ.Ε. Σμαλλεψ, Ξ60: βυζκμινστερφυλλερενε, Νατυρε 318 (1985) 162–163.

[18] Σ. Ινθιμα, Ηελικαλ μιζροτυβυλεσ οφ γραπητις ζαρβον, Νατυρε 354 (1991) 56–58.

[19] Σ. ΐρασι, Σ. Δαγ, Τ. Ψιλδιριμ, Ο. Γυλσερεν, Ρ.Τ. Σεγγερ, Φυνςτιοναλιζεδ ζαρβον νανοτυβεσ ανδ δειξε αππλκιατιονς, Θ. Πηψς: δνδενς. Ματτερ 16 (2004)

P901–P960.

[20] Κ.Σ. Νοοσελο, Α.Κ. Γειμ, Σ.Ξ. Μοροζο, Δ. Θιανγ, Ψ. Ζηανγ, Σ.Ξ. Δυβονοσ, ετ αλ., Ελεςτρις φιελδ εφφερετ ιν ατομικαλλψ τηνη ζαρβον φιλμς, Σζιενςε 306 (2004)

666–669.

[21] Ξ.Σ. ασαρι, Μ. Τομμασινι, Ρ.Ρ. Τψκωινσκι, Α. Μιλανι, αρβον-ατομ ωιρεσ 1-Δ σψστεμς ωιτη τυναβλε προπερτιεσ, Νανοσςαλε 8 (2016) 4414–4435.

[22] Σ.Υ.Σ. Ήοι, Ενηανςινγ τηερμαλ ζονδυςτυτψ οφ φλυιδς ωιτη νανοπαρτιςλεσ, ιν: Τηε Προζεεδινγς οφ τηε 1995, ΑΣΜΕ Ιντερνατιοναλ Μεσηανικαλ Ενγινεερινγ δνγγρεσς

ανδ Εξποσιτιον, Σαν Φρανκισκο, ΥΣΑ, ΑΣΜΕ,1995, ππ. 99–105.

[23] Η.Υ. Κανγ, Σ.Η. Κιμ, Θ.Μ. Οη, Εστιματιον οφ τηερμαλ ζονδυςτυτψ οφ νανοφλυιδ υσινγ εξπεριμενταλ εφφερετιε παρτιςλε ολυμε, Εξπ. Ηεατ Τρανσφ. 19 (2006)

181–191.

[24] Σ. Ναδεεμ, Ξ. Λεε, Βουνδαρψ λαψερ φλω οφ νανοφλυιδ οερ αν εξπονεντιαλλψ στρετςηινγ συρφαζε, Νανο- σςαλε Ρεζ. Λεττ. 94 (2012) 7.

[25] Μ. Σηεικηολεσλαμι, Νυμερικαλ σιμυλατιον οφ μαγνετις νανοφλυιδ νατυραλ ζονεστιον ιν πορουσ μεδια, Πηψς. Λεττ. Α 381 (2017) 494–503.

[26] Μ. Σηεικηολεσλαμι, ΎΟ-ωατερ νανοφλυιδ φρεε ζονεστιον ιν α πορουσ ζαιτψ ζονσιδερινγ Δαρψ λαω, Ευρ. Πηψς. Θ. Πλυς 132 (2017) 55.

[27] Μ. Σηεικηολεσλαμι, Νυμερικαλ ινεστιγατιον οφ νανοφλυιδ φρεε ζονεστιον υνδερ τηε ινφλυενςε οφ ελεςτρις φιελδ ιν α πορουσ ενςλοσυρε, Θ. Μολ. Λιχ. 249 (2018)

1212–1221.

[28] Μ. Σηεικηολεσλαμι, Η.Β. Ροκνι, Σιμυλατιον οφ νανοφλυιδ ηεατ τρανσφερ ιν πρεσενςε οφ μαγνετις φιελδ, Α ρειω, Ινη. Θ. Ηεατ Μασς Τρανσφ. 115 (2017) 1203–1233.

- [29] Μ. Σηεικηολεσλαμι, Β. Ροκνι Ηουμαν, Νυμερισαλ σιμυλατιον φορ ιμπαστ οφ δυλομβ φορσε ον νανοφλυιδ ηεατ τρανσφερ ιν α πορους ενκλοσυρε ιν πρεσενσε οφ τηερμαλ ραδιατιον, Ιντ. Θ. Ηεατ Μασς Τρανσφ. 118 (2018) 823–831.
- [30] Α.΄. Ερινγεν, Σιμπλε μιχροπολαρ φλυιδς, Ιντ. Θ. Ενγ. Σει. 2 (1964) 205–217.
- [31] Α.΄. Ερινγεν, Τηεορψ οφ μιχροπολαρ φλυιδ, Θ. Ματη. Μεση. 16 (1966) 1–18.
- [32] Γ. Λυκασζεωιςζ, Μιχροπολαρ Φλυιδς: Τηεορψ ανδ Αππλιςατιονς, Βρικηαυσερ, Βασελ, 1999.
- [33] Α.Α. Μοηαμμεαδιν, Ρ.Σ.Ρ. Γορλα, Εφφεστς οφ τρανσερσε μαγνετις φιελδ ον α μιζεδ ζονεστιον ιν α μιχροπολαρ φλυιδ ον α ηοριζονταλ πλατε ωιτη εστορεδ μασς τρανσφερ, Αςτα Μεση. 118 (1966) 1–12.
- [34] Α. Ισηακ, Ψ.Ψ. Λοκ, Α. Ποπ, Σταγνατιον-ποιντ φλωω οερ α σπρινκινγ σπρετ ιν α μιχροπολαρ φλυιδ, ηεμ. Ενγ. δμμυν. 1417–1427 (2010) 197.
- [35] Αβδ Ελ-Ηακιεμ, Μ. Μοηαμμεαδιν, Σ.Μ.Μ. Ελ-ΚαβειρΡαμα, Σ.Ρ. Γορλα, Θουλε ηεατινγ εφφεστς ον μαγνετοψδροψναμικς φρεε ζονεστιον φλωω οφ α μιχροπολαρ φλυιδ, Ιντ. δμμυν. Ηεατ Μασς Τρανσφ. 26 (1999) 219–227.
- [36] Μ. Ραμζαν, Μ. Φαροοχ, Τ. Ηαψατ, Θαε Δονγ ηυνγ, Ραδιατιε ανδ Θουλε ηεατινγ εφφεστς ιν τηε ΜΗΔ φλωω οφ α μιχροπολαρ φλυιδ ωιτη παρτιαλ σλιπ ανδ ζονεστιε βουνδαρψ ζονδιτιον, Θ. Μολ. Λιχ. 221 (2016) 394–400.
- [37] Νορ Αζιζαη Ψαζοβ, Ανυαρ Ισηακ, Ιοαν Ποπ, Μελτινγ ηεατ τρανσφερ ιν βουνδαρψ λαψερ σταγνατιον-ποιντ φλωω τωααρδς α στρετσηινγ/σπρινκινγ σπρετ ιν α μιχροπολαρ φλυιδ, δμπυτ. Φλυιδς 47 (2011) 16–21.
- [38] Μ. Ζιαυλ Ηαχυε, Μ. Μαημυδ Αλαμ, Μ. Φερδοως, Α. Ποστελνικς, Μιχροπολαρ φλυιδ βεηαιορς ον στεαδψ ΜΗΔ φρεε ζονεστιον ανδ μασς τρανσφερ φλωω ωιτη ζονσταντ ηεατ ανδ μασς φλυζεζ, θουλε ηεατινγ ανδ ιςουζς διςσιπατιον, Θ. Κινγ Σαυδ. Υνι., Ενγ. Σει. 24 (2012).
- [39] Ζ. Σηαη, Σ. Ιςλαμ, Η. Αψαζ, Σ. Κηαν, Ραδιατιε ηεατ ανδ μασς τρανσφερ αναλψσις οφ μιχροπολαρ νανοφλυιδ φλωω οφ αςσον φλυιδ βετωεεν τωο ροτατινγ παραλλελ πλατεζ ωιτη εφφεστς οφ Ηαλλ ζυρρεντ, ΑΣΜΕ Θ. Ηεατ Τρανσφ. (2018), ηττπς://doi.org/10.1115/1.4040415.
- [40] Ζ. Σηαη, Σ. Ιςλαμ, Τ. Γυλ, Ε. Βονψαη, Μ.Α. Κηαν, Τηε ελεςτριςαλ ΜΗΔ ανδ ηαλλ ζυρρεντ ιμπαστ ον μιχροπολαρ νανοφλυιδ φλωω βετωεεν ροτατινγ παραλλελ πλατεζ, Ρεσυλτς Πηψς. 9 (2018) (2018) 1201–1214, ηττπς://doi.org/10.1016/θ.ρινπ.2018.01.064.
- [41] Σ. Ναδεεμ, Ρασηιδ Μεημοοδ, Σ. Μασοοδ, Εφφεστς οφ τρανσερσε μαγνετις φιελδ ον α ροτατινγ μιχροπολαρ φλυιδ βετωεεν παραλλελ πλατεζ ωιτη ηεατ τρανσφερ, Θ. Μαγν. Μαγν. Ματερ. 401 (2016) 1006–1014.
- [42] Π. Φορςηηειμερ, Ωασσερβεωεγυνγ δυρση βοδεμ, Ζ. ερ. Δ. Ινγ. 45 (1901) 1782–1788.
- [43] Μ. Μυσκατ, Τηε Φλωω οφ Ηομογενεουζ Φλυιδς τηρουγη Πορους Μεδια, Εδωαρδς, ΜΙ, 1946.
- [44] Δ. Παλ, Η. Μονδαλ, Ηψδρομαγνετις ζονεστιε διφψυσιον οφ σπεςιεζ ιν Δαρςψ-Φορςηηειμερ πορους μεδιυμ ωιτη νον-υνιφορμ ηεατ σουρζε/σινκ ανδ αριαβλε ιςοοσιτψ, Ιντ. δμμυν. Ηεατ Μασς Τρανσφ. 39 (2012) (913; }917).
- [45] Τ. Ηαψατ, Τ. Μυηαμμαδ, Σ. Αλ-Μεζαλ, Σ.Θ. Λιαο, Δαρςψ-Φορςηηειμερ φλωω ωιτη αριαβλε τηερμαλ ζονδυςτιτψ ανδ αττανεο-ηριςτο ηεατ φλυζ, Ιντ. Θ. Νυμερ.

[65] Τ. Χαψατ , Σ. Χαψψυμ , Μ.Ι. Κηαν , Α. Αλσαεδι , Μοδερν δεελοπμεντς αβουτ στατισ- τιςαλ δεσλαφατιον ανδ προβαβλε ερρορ φορ σκιν φριςτιον ανδ Νυσσελτ νυμβερ ωιτη ζοππερ ανδ σιλερ νανοπαρτιςλες, ήινεσε Θ. Πηψς. 55 (2017) 2501–2513 .

[66] Τ. Χαψατ , Μ.Ι. Κηαν , Μ. Ωαχας , Α. Αλσαεδι , Ον άττανεο-ήριστο ηεατ φλυξ ιν τηε φλωω οφ αριαβλε τηερμαλ ζονδυςτιυτψ Εψρινγ–Ποωελλ φλυιδ, Ρεσυλτς Πηψς. 7 (2017) 446–450 .

[67] Ψασιρ Ναωαζ, Κελλερ-Βοξ σηοοτινγ μετηροδ ανδ ιτς αππλιςατιον το νανοφλυιδ φλωω οερ ζονεςτιελψ ηεατεδ σηεετ ωιτη σταβιλιτψ ανδ ζονεργενσε, ΝΥΜΕΡΓΑΛ HEAT TRANSFER, ΠΑΡΤ Β: ΦΥΝΔΑΜΕΝΤΑΛΣ 2019, °ΟΛ. 76, NO. 3, 152–180.